

HM für Informatiker Frühjahr 2005

Dr. Schmoeger

Klausur vom 22.3.2005
Aufgaben und Lösungen



Herausgegeben von der Fachschaft
Mathematik/Informatik

Bei Fehlern bitte Nachricht an
informatik@fachschaft.uni-karlsruhe.de

Unterstützt durch die UStA Beitragsmarke

Umbrochen von Florian Siegmund

Version 1.1 vom 11. Juli 2005

Durchfallquote: > 40%
Pro Aufgabe gab es 3 Punkte.
Hinreichend zum Bestehen waren 10 Punkte.

Höhere Mathematik I - Aufgaben

Aufgabe 1.1

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0 = a$, $a_1 = b$ und $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + a_{n-1})$.

- (a) Zeigen Sie induktiv: $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (b - a)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
 (b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

Hinweis zu (b): $a_n - a_0 = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})$.

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie zu den folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius. Berechnen Sie auch den Wert der ersten Reihe im Punkt $x = \frac{1}{4}$.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (32)^k x^{5k}$;

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)^k} x^k$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(3k)!}$;

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2 \tan x}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x}e^{-x/4}$;

Hinweis zu (c): Verwenden Sie (a).

Aufgabe 1.4

Es sei $K > 0$, $\alpha \geq 1$ und für die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \text{ für alle } x, y \in [0, 1].$$

- (a) Zeigen Sie: ist $\alpha > 1$, so ist f auf $[0, 1]$ konstant.
 (b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass im Falle $\alpha = 1$, f nicht konstant auf $[0, 1]$ sein muss.

Aufgabe 1.5

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

(a) $\int_1^{\sqrt{e}} x \log(x^2) dx$;

(b) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$.

Höhere Mathematik II - Aufgaben

Aufgabe 2.1

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$.
- (b) Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von f in $(0, 0)$ existieren, f aber nicht differenzierbar in $(0, 0)$ ist.

Aufgabe 2.2

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

- (a) $x^2 y(x) = (1 + x)y'(x)$, $y(1) = 1$;
- (b) $y'(x) = 2\sqrt{y(x)}x \sin(2x)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{16}$.

Aufgabe 2.3

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ des Punktes $(0, e)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$y^2 + xf(x, y) + (f(x, y))^2 - e^{f(x, y)} = 4 \quad \text{für alle } (x, y) \in U \quad \text{und} \quad f(0, e) = 2.$$

- (b) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0, e)$.

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie für

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 1\}$$

das Integral $\int_M \frac{x}{y} d(x, y)$.

Aufgabe 2.5

Es sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z = 1\}$ und $f(x, y, z) = xyz$. Zeigen Sie, dass $\max f(K)$ und $\min f(K)$ existieren und berechnen Sie diese.

Höhere Mathematik I - Lösungen

Lösung 1.1

Sei $n \in \mathbb{N}$; Dann ist

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + a_{n-1}) - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)(a_n - a_{n-1})$$

(a) Induktion: $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (b - a)$ für $n \in \mathbb{N}_0$

IA: $n = 0$: $a_1 - a_0 = (b - a)$

IS: $n \rightarrow n + 1$: $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)(a_n - a_{n-1}) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n (b - a) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (b - a)$.

(b) Nun ist

$$a_n = a_n - a_0 + a_0 \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) + a_0 \stackrel{\text{(a)}}{=} (b - a) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k}_{\text{geom. Reihe}} + a$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (b - a) \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} + a = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}b$$

Die geom. Reihe konvergiert, da $|\frac{1}{3}| < 1$.

Lösung 1.2

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} 32^k x^{5k} = \sum_{k=0}^{\infty} ((2x)^5)^k$ geom. Reihe konvergiert gdw. $|(2x)^5| = |2x|^5 < 1 \iff |2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$

i.e. Konv.radius $r = \frac{1}{2}$.

Der Wert der Reihe in $x = \frac{1}{4}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{32}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{32}} = \frac{32}{31}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ konv. $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right|$ gegen $e^{|x|}$ und es gilt

$$\left|\frac{x^k}{(3k)!}\right| \leq \left|\frac{x^k}{k!}\right| \xrightarrow{\text{Maj. Krit.}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(3k)!} \text{ konvergiert (absolut) für alle } x \in \mathbb{R};$$

d.h. der Konvergenzradius ist $r = \infty$.

(c) Quotientenkriterium: $a_k = \frac{k!}{(2k)^k} \neq 0 \forall k$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k!(2k+2)^{k+1}}{(2k)^k(k+1)!} = 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)} = 2 \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = 2 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2e = r.$$

Der Konvergenzradius ist $r = 2e$.

Lösung 1.3

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x}e^{-x/4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^{x/4}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{4}e^{x/4}} = 0.$

Oder: $\exists c > 0$ so dass $2\sqrt{x} \leq ce^{+x/8} \forall x \geq 0$
 $\Rightarrow 2\sqrt{x}e^{-x/4} \leq ce^{x/8-x/4} = ce^{-x/8} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x}} \stackrel{(a)}{=} 1$ Oder: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x} \stackrel{\text{stetig}}{=} \frac{1}{1 + \tan^2 0} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(1+x^2)} \stackrel{\text{stetig}}{=} -\frac{1}{3}$

Alternativ über Potenzreihendarstellung.

Damit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2 \tan x} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$

Lösung 1.4

(a) Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig, $y \neq x$.

Dann existiert $f'(x) = 0$, denn $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq K|x-y|^{\alpha-1} \xrightarrow{\alpha > 1} 0$ für $y \rightarrow x$

$\stackrel{\text{MWS}}{\implies} f$ ist konstant auf $[0,1]$.

(b) Für $\alpha = 1$ erfüllt $f(x) = x$ die Ungleichung ist aber nicht konstant.

Lösung 1.5

(a) $\int_1^{\sqrt{e}} x \log(x^2) dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_1^e \frac{1}{2} \log u du \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left[\frac{1}{2} u \log u \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} u \frac{1}{u} du = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}.$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2 + x - 2} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} \right] dx =$
 $\frac{1}{3} \left(\log|x-1| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \log(x+2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(\underbrace{\log \frac{1}{2}}_{=-\log 2} - \log \frac{5}{2} + \log 2 \right) = -\frac{1}{3} \log \frac{5}{2}.$

Höhere Mathematik II - Lösungen

Lösung 2.1

(a) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Aber: $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

Somit ist f unstetig in 0.

(b) f ist nicht total differenzierbar in 0; sonst wäre f in 0 stetig.

Seien $r, s \in \mathbb{R}$, $r^2 + s^2 = 1$. Dann ist f in 0 in Richtung $h = (r, s)$ diff'bar:

$$\frac{f(th) - f(0)}{t} = t^{-1} \frac{(tr)^2 ts}{(tr)^4 + (ts)^2} = \frac{r^2 s}{t^2 r^4 + s^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{r^2 s}{s^2} = \frac{r^2}{s} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases}$$

Lösung 2.2

(a) $x^2 y = (1+x)y'$, $y(1) = 1$ Dgl. in getr. Veränderlichen

$$\Rightarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{u} du = \int_1^x \frac{s^2}{1+s} ds$$

$$\Leftrightarrow \log y(x) = \int_1^x \left(s - 1 + \frac{1}{s+1} \right) ds = \left[\frac{s^2}{2} - s + \log(s+1) \right]_1^x =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + \log(1+x) \right) - \left(-\frac{1}{2} + \log 2 \right)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{x^2/2 - x} (1+x) \frac{\sqrt{e}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b) $y' = 2\sqrt{y}x \sin(2x)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{16}}^{y(x)} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_{\frac{\pi}{4}}^x t \sin(2t) dt$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{\Leftrightarrow} \sqrt{y} \Big|_{\frac{1}{16}}^{y(x)} = -\frac{1}{2} t \cos(2t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^x + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos(2t) dt$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y(x)} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y(x)} = \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2} x \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2} x \cos(2x) \right)^2.$$

Lösung 2.3

(a) Definiere $F : \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$

$$\Rightarrow F(0, e, 2) = 0. \quad F \text{ ist stetig diff'bar auf } \mathbb{R}^3 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial z}(0, e, 2) = [x + 2z - e^z]_{(0, e, 2)} = 4 - e^2 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, e)$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $F((x, y), f(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U$
d.h es gilt die gesuchte Identität.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, e) = - \left(\frac{\partial F}{\partial z}(0, e, f(0, e)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(0, e, 2) = \frac{-1}{4 - e^2} 2.$

Lösung 2.4

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 1\} \Rightarrow y \in [1, 2]$$

Für $y \in [1, 2]$ fest gilt:

$$M(y) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\} = \left[-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}\right].$$

Für $f(x, y) = \frac{x}{y}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) d(x, y) &= \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{y} dx \right) dy \\ &= \int_1^2 \frac{x^2}{2y} \Big|_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy = \int_1^2 0 dy = 0. \end{aligned}$$

Lösung 2.5

Die Menge K ist beschränkt und abgeschlossen also kompakt.

Da f stetig ist, existieren damit $\min f(K)$ und $\max f(K)$.

Da $f(K) \subset [0, \infty)$, folgt aus $(1, 0, 0) \in K$, $f(1, 0, 0) = 0$: $\min f(K)$.

Das Maximum bestimmen wir mit der Lagrange'schen Multiplikatorenregel:
Ist x_0 die/eine Maximalstelle, so gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla F(x_0, \lambda) = 0$ wobei

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z); \quad g(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

D.h. in diesem Punkt $x_0 \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= yz = \lambda \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= xz = \lambda \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= xy = \lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow xyz = \lambda x = \lambda y = \lambda z \quad (\text{wir können } x, y, z > 0 \text{ annehmen})$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $\lambda = 0 \Rightarrow (x, y, z) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ das sind Minimalstellen

(ii) $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = y = z \stackrel{NB}{=} \frac{1}{3} \Rightarrow \max f(K) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.