

Lösungen Teil 1 HM für Infos Frühjahr 2001

Aufgabe 1.1

Induktionsannahme für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 3^k k = \frac{3}{4} 4 = \frac{3}{4} [3^1 (2 * 1 - 1) + 1]$$

Induktionsvoraussetzung für n :

$$\sum_{k=1}^n 3^k k = \frac{3}{4} [3^n (2 * n - 1) + 1]$$

Induktionsschritt von n auf $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^k k = \sum_{k=1}^n 3^k k + 3^{n+1} (n + 1) = \frac{3}{4} [3^n (2 * n - 1) + 1] + 3^{n+1} (n + 1) =$$

$$= \frac{3}{4} [3^n (2 * n - 1) + 1 + 3^n (4n + 4)] = \frac{3}{4} [3^n (6 * n + 3) + 1] = \frac{3}{4} [3^{n+1} (2(n + 1) - 1) + 1]$$

Aufgabe 1.2

a) mit Minorantenkriterium:

$$\frac{(\sqrt{k+1})^2}{k^2 + \sqrt{k^4 - 1}} \geq \frac{(\sqrt{k})^2}{k^2 + \sqrt{k^4}} = \frac{1}{2k}. \text{ Die Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \text{ divergiert,}$$

folglich divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k+1})^2}{k^2 + \sqrt{k^4 - 1}}$.

b) mit Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{k^3}} = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$$

\Rightarrow Reihe konvergiert.

c) mit Quotientenkriterium:

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n-1}{n}} = \frac{1}{5} \left(\frac{\binom{(2n+1)!}{(n+1)!n!}}{\binom{(2n-1)!}{n!(n-1)!}} \right) = \frac{1}{5} \frac{(2n+1)2n}{(n+1)n} = \frac{1}{5} \frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5} < 1$$

\Rightarrow Reihe konvergiert.

Aufgabe 1.3

a)

$$\frac{1 - \cos(x/3)}{1 - \cos(x/2)} = \frac{-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/3)^{2k}}{2k!}}{-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{2k!}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x/3)^{2k-2}}{2k!}}{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x/2)^{2k-2}}{2k!}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2 \cdot 9}}{\frac{1}{2 \cdot 4}} = \frac{4}{9}$$

Einfacher mit l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x/3)}{1 - \cos(x/2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{l'Hosp.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \sin(x/3)}{\frac{1}{2} \sin(x/2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{l'Hosp.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{9} \cos(x/3)}{\frac{1}{4} \cos(x/2)} = \frac{4}{9}$$

b)

$$\frac{e^{x^3} - 1}{x(1 - \cos x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k!}}{x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x^{2k})}{(2k!)}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k-3}}{k!}}{\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^{k+1}) \frac{(x^{2k-2})}{(2k!)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1/2} = 2$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \sqrt{\sin t} dx}{x^{3/2}} \xrightarrow{l'Hosp.} \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{3}$$

Lösungen Teil 1 HM für Infos Frühjahr 2001

Aufgabe 1.4

Definiere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ durch $f(x) := \log(1 + e^x)$.

Dann gilt: $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Für $x \geq 0$ gelten $\frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\frac{e^x}{1+e^x} \leq 1$.

Also gilt $\frac{1}{2} \leq |f'(x)| \leq 1$ (*)

Für alle $x > 0$ seien nun $x, y \geq 0$ und ObdA $x < y$.

Dann existiert nach Mittelwertsatz (MWS)

ein $\zeta \in (x, y)$ mit $\log(1 + e^y) - \log(1 + e^x) = f'(\zeta)(y - x)$. Also mit (*)

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |\log(1 + e^x) - \log(1 + e^y)| \leq |f'(\zeta)(x - y)| \leq |x - y|$$

Aufgabe 1.5

$x \in (0, 1]$ fest $\implies |f_n(x)| = \frac{n^2 x}{e^{nx}} \leq \frac{n^2 x}{\frac{n^3 x^3}{6}} = \frac{6}{x^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; außerdem $f_n(0) = 0$.

Also $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ **punktweise** für $x \in [0, 1]$.

Jedoch keine gleichmäßige Konvergenz wegen $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \neq 0$

Aufgabe 1.6

a)

Mit partieller Integration: $\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx =$

$$\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}\right]_0^2 + \int_0^2 x e^{-x^2} dx = -2e^{-4} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2e^4}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+(\sin x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1+(\sin x)^2} dx =: \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\log(u(x))]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\log(1 + (\sin x)^2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 2$$

c)

Integrand ungerade $\implies \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 0$

Es ist sinnvoll, sich hier ein Schaubild zu skizzieren!

Aufgabe 1.7

a)

$\frac{(\sin x)^2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \implies x \mapsto \frac{(\sin x)^2}{x^2}$ ist stetig fortsetzbar auf $[0, \infty) \implies \int_0^1 \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx$ existiert

und es gilt außerdem $0 = \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \underbrace{\frac{(\sin x)^2}{x^2}}_{\leq 1} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$

b)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ existiert und } \frac{(\sin x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \implies \int_1^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx$$

existiert nach Majorantenkriterium. Außerdem gilt

$$0 \leq \int_1^{\infty} 0 dx \leq \int_1^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^k = 1$$

Lösungen Teil 2 HM für Infos Frühjahr 2001

Aufgabe 2.1

Es ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$\text{grad} f(x, y) = ([2x - 2x^3 + 4xy^2], [-4y - 2yx^2 + 4y^3])e^{-(x^2+y^2)}$$

und $Hf(x, y) = (\text{zusammengefasst, nachrechnen!})$

$$e^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} [2 - 10x^2 + 4y^2 + 4x^4 - 8y^2x^2] & [4xy + 4x^3y - 8xy^3] \\ [4xy + 4x^3y - 8xy^3] & [-4 + 16y^2 - 2x^2 + 4y^2 + 4x^2y^2 - 8y^4] \end{pmatrix}$$

a)

$$\text{grad} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow [x = 0 \wedge (y = 0 \vee -2y^2 = -2)] \vee [y = 0 \wedge x^2 = 1]$$

\Rightarrow Kritische Punkte $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$.

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow \text{keine Extremstelle;}$$

$$Hf(0, 1) = Hf(0, -1) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ positiv definit} \Rightarrow \text{Stellen lokaler Minima;}$$

$$Hf(1, 0) = Hf(-1, 0) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ negativ definit} \Rightarrow \text{Stellen lokaler Maxima}$$

b)

$$|f(x, y)| \leq 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y),$$

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \max_{\underbrace{(f(0,0), f(0,1), f(0,-1), f(1,0), f(-1,0))}_A} = \max\left(0, \frac{-2}{e}, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \xrightarrow{a)} = \min(A) = -\frac{2}{e}$$

Aufgabe 2.2

$$f \in C^\infty; \quad \text{grad} f(x, y) = \left[1 + (\tan(x+y))^2 + \frac{2x}{1+x^2+y^2}, 1 + (\tan(x+y))^2 + 1\right]^T$$

$\Rightarrow \text{grad} f(0, 0) = (1, 2)^T; f(0, 0) = 0$. Existenz von ε und g folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Dieser Satz liefert auch $g'(0)$ zu $-\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.3

$$\text{Transformation auf Zylinderkoordinaten: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \cos \phi \\ r * \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad d(x, y, z) = d(r, \phi, z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_D z e^{x^2+y^2} d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r z e^{r^2} dr d\phi dz = 2\pi \int_0^1 [1/2 z e^{r^2}]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz \\ &= \pi \int_0^1 (z e^{1+z^2} - z) dz = \pi \left[\frac{1}{2} e^{1+z^2} - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \pi(e^2 - 1 - e) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 1) + 3\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

$$\text{Eigenvektoren: } \lambda = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ddot{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung nächste Seite \rightarrow

Lösungen Teil 2 HM für Infos Frühjahr 2001

Fortsetzung Aufgabe 2.4

$$\lambda = -1 : \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Weitere Lösung: Ansatz: $y = e^x(xv + w) \Rightarrow$ es muss gelten
 $e^x(xv + w + v) = e^x(xAv + Aw) \Leftrightarrow -v = (I - A)w \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & +0 \\ 1 & -1 & -3 & +1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{FDS} = \left(e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} 3x + 3 \\ 2 \\ -x \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 2.5

Wegen $y(1) = 1$ wird die Lösung $y > 0$ gesucht. Teile durch xy^2 (da $x \geq 1, y > 0$):
 $\frac{1}{x}y - xy^{-2} + y' = 0 \Rightarrow$ Bernoulli-Differentialgleichung.

Multiplikation mit $3y^2$ ergibt $\frac{3}{x}y^3 - 3x + (y^3)' = 0$

Substitution $u = y^3 \Rightarrow u' = 3x - \frac{3}{x}u$

Homogene Lösung: $u_h = ce^{-\int \frac{3}{x} dx} = \frac{c}{x^3}$

Partikuläre Lösung: $u_p = \frac{c(x)}{x^3} \Rightarrow u_p' \left(\frac{c'(x)}{x^3} - 3 \frac{c(x)}{x^3} \right) \stackrel{!}{=} 3x - 3 \frac{c(x)}{x^3} \Rightarrow c'(x) = 3x^4$

$\Rightarrow c(x) = 0.6x^5 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{c}{x^3} + 0.6x^2}; y(1) = \sqrt[3]{c + 0.6} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{2}{5x^3} + 0.6x^2}$

Aufgabe 2.6

$$L(y'' - 9y) = L(y'') - 9L(y) = x^2L(y) - xy(0) - y'(0) - 9L(y) = \\ = (x^2 - 9)L(y) - x \stackrel{!}{=} \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2-9)} + \frac{x}{x^2-9} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1 + (x^2 + 1)x = A(x + 3)(x^2 + 1) + B(x - 3)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 3)(x - 3)$$

$$\underline{x = 3} : 1 + 30 = A * 6 * 10 \Rightarrow A = \frac{31}{60}; \quad \underline{x = -3} : -29 = B(-6) * 10 \Rightarrow B = \frac{29}{60}$$

$$\underline{x = 0} : 1 = 3A - 3B - 90 \Rightarrow D = \frac{3A - 3B - 1}{9} = \frac{0.1 - 1}{9} = -0.1$$

$$\underline{x = 1} : 3 = 8A - 4B + (C - 0.1)(-8)$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{8}(4B - 8A + 3 - \frac{8}{10}) = -\frac{1}{80}(\frac{116-248}{6} + 22) = -\frac{1}{80}(\frac{-132}{6} + 22) = 0$$

$$L(y) = \frac{31}{60} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{29}{60} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow y = \frac{31}{60}e^{3t} + \frac{29}{60}e^{-3t} - \frac{1}{10} \sin(t)$$

Aufgabe 2.7

Zu Lösen: $g + \varphi = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \hat{g}\hat{\varphi} = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \Rightarrow \hat{\varphi} = \frac{1+x^2}{2}F\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$\Rightarrow \varphi = F^{-1}\left(\frac{1+x^2}{2}F\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'' = \frac{1}{2(1+x^2)} + \left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)' =$$

$$\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{(1+x^2)^2 - x \cdot 4 \cdot (1+x^2) \cdot x}{(1+x^2)^4} = \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3}$$