Höhere Mathematik I & II
für Informatiker
(Herbst 2000)

** Prof. Dr. von Renteln **
** Herausgegeben von der Fachschaft Math/Inf **
** Vorfinanziert mit der UStA-Beitragsmarke **
** Gedruckt beim StudentenServiceVerein **
** Umbrecher: Christian Maier **

*** Preis 1,- DM ***

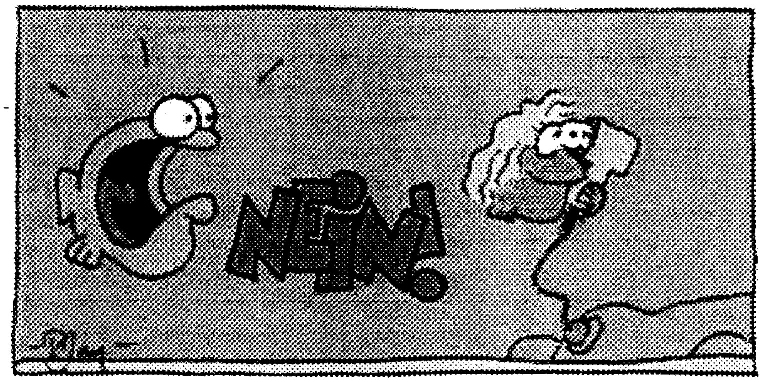
Sponsored by

Satan


Hallo Freunde! Hier spricht der liebe Gott! Ich gehe jetzt erstmal aufs Klo, okay? Also bitte verlaßt euch die nächsten zehn Minuten nicht auf mich. Danke!
Oh nein!


TELESHOPPING FÜR MINDERHEITEN.
IST IHNEN DAS NICHT AUCH SCHON PASSIERT? SIE VERSUCHEN, EINEN BÄREN IM WANDSCHRANK ZU HALTEN, WÄHREND IHR FUSS MUTIERT UND EIN FROSCH IHR TELEFON MIT NUTELLA EINSCHMIERT. DANN BRAUCHEN SIE DEN QUIELMASTER 2000.
SAG DIE NUMMER... SAG DIE NUMMER...

HM 1:



Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} .$$

Aufgabe 2

Es sei $a_k \geq 2$ für $k = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe (z.B. mittels Majorantenkriterium):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} .$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh x - 1}{\cosh x + 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$, $(a, b \in \mathbb{R})$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

Hinweis: $\ln x = \log x$ $(x > 0)$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{2n-3} .$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die Potenzreihe konvergiert.

b) Bestimmen Sie für diese x den Wert der Potenzreihe.

Aufgabe 5

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^{2x} - e^{-3x} .$$

Zeigen Sie, daß f eine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, und berechnen Sie $g(0)$, $g'(0)$.

Aufgabe 6

Es sei $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

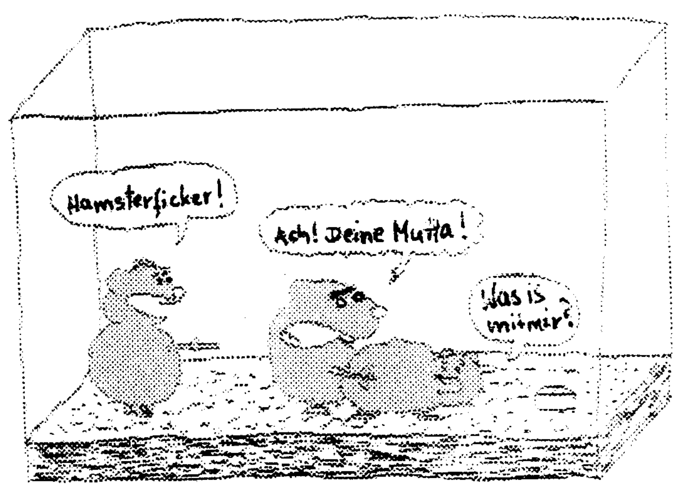
a) Ist die Folge (f_n) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent?

b) Ist die Folge (f_n) auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergent?

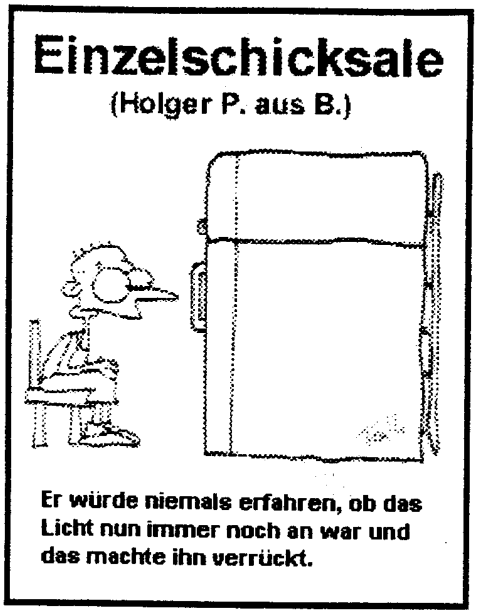
Aufgabe 7

Berechnen Sie das unbestimme Integral

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x} \, dx \; , \; x > 0 .$$



Eklig - Sex mit Tieren!



HM 2:

Aufgabe 1

Die Funktion $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } f(0,0) := 0 .$$

a) Zeigen Sie $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial e}(0,0)$ für einen beliebigen normierten Vektor $e \in \mathbb{R}^2$.

c) Weisen Sie nach, daß f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

d) Geben Sie grad f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 2

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x,y) := xy - 2(x^2+y^2) .$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf der Menge

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 8\} .$$

Aufgabe 3

Es sei $R > 0$ und für $\rho \in (0,R)$ sei

$$B_\rho = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0,\ \rho^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} .$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{\rho \to 0+} \int_{B_\rho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, d(x,y,z) .$$

Aufgabe 4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2xy + 2x^3y^3 = 0 ,\ y(0) = 1 .$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' = y\tan x - 2\sin x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $y' = e^y \sin x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 6

Lösen Sie das Anfangswertproblem

mit Laplace?

$$u^{(4)} + 2u'' + u = \sin(2t),\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0 .$$

Aufgabe 7

Gegeben seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0), \\ \beta x, & x \in [0,\pi], \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x) .$$

a) Geben Sie die Koeffizienten a_k und b_k in der folgenden Darstellung der Fourierreihe von f an:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

b) Geben Sie (in Abhängigkeit von α und β) an, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungen HM1:

1 z.z.: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

I.A.: $n=1: \; -1 = -1 \;\checkmark$

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1: \quad \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 \overset{IV}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)(n+1)$

$= (-1)^{n+1} \left(\frac{-n(n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n+1)+(n+1)}{2} \right)$

$= (-1)^{n+1} \left(\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \right) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2 $b_k := \frac{1}{a_1 \cdots a_k}, \quad 0 \le b_k \le \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$\Rightarrow b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad ; \quad b_0 := 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - 1}{a_1 \cdots a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdots a_{k-1}} - \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{k-1} - b_k) \overset{\text{Teleskop}}{=} \lim_{n\to\infty} b_0 - b_{n+1} = 1$

3 a) $\frac{\sinh x - 1}{\cosh x + 1} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1} = \frac{\frac{1 - e^{-2x}}{2} - e^{-x}}{\frac{1 + e^{-2x}}{2} + e^{-x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1/2}{1/2} = 1$

b) $\frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2} = \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2(\sqrt{\cos(ax)} + \sqrt{\cos(bx)})}$

$= \frac{1 - a^2x^2 - \left(1 - \frac{b^2x^2}{2}\right) + o(x^2)}{x^2(\sqrt{\cos(ax)} + \sqrt{\cos(bx)})}$

$= \frac{b^2 - a^2}{2(\sqrt{\cos(ax)} + \sqrt{\cos(bx)})} + o(1) \xrightarrow{x\to 0} \frac{b^2 - a^2}{4}$

I (3) c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x + 1)x^x - 1}{-1 + \frac{1}{x}}$

$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x})x^x}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{-1} = -2$

4 a) $\forall n \ge 2: \; 1 \le \sqrt[2n-3]{n-1} \le \sqrt[2n-3]{2n-3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$

Randpunkte: $|x| = 1: \; |(n-1)x^{2n-3}| = n-1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ Reihe diverg.

$\to$ Konvergenzmenge $(-1,1)$

b) $|x| < 1: \; \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{2n-3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} (2n-2) t^{2n-3} dt \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x (2n-2) \cdot t^{2n-3} dt \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^{2n-2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

5 $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty, \; f(x) \xrightarrow{x\to -\infty} -\infty, \; f$ stetig

$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = 2e^{2x} + 3e^{-3x} > 0, \; x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ injektiv. Insgesamt: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, also $\exists$ Umkehrfkt. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \; ; \; f'(x) = 2e^{2x} + 3e^{-3x}$; also

$f'(0) = 5$, also $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$

(6) a) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber für $x_n = n\frac{\pi}{2}$ gilt:

$|f_n(x_n)| = |\sin\frac{\pi}{2}| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Also (f_n) nicht gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$.

(7.) $x^2 + x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$; $x = 0 \rightsquigarrow A = -1$

$x = 1$; $x = -1$: $\rightsquigarrow$ $1 = -2 + B + C$, $-1 = -2 + B - C$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ $C = 3 - B$, $2B = 4$ $\rightsquigarrow$ $C = 1$, $B = 2$

also: $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x}\,dx = \int -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

$= \int -\frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$\overset{x>0}{=} -\ln x + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$

$= \ln\frac{x^2+1}{x} + \arctan x + C$

Lösungen HM2:

(1.) a) Sei $((x_n,y_n))$ Folge mit $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x,y) \in \mathbb{R}^2$

1. Fall $(x,y) \neq (0,0)$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: (x_n,y_n) \neq (0,0)\ n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: f(x_n,y_n) = \frac{x_n^3}{x_n^2+y_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^3}{x^2+y^2} = f(x,y)$

2. Fall $(x,y) = (0,0)$: OBdA: $\forall n\ (x_n,y_n) \neq (0,0)$

$\rightsquigarrow |f(x_n,y_n)| = \frac{|x_n|^3}{(x_n^2+y_n^2)} \leq |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow f(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(0,0)$

b) $e = (e_1,e_2)$: $\frac{\partial f}{\partial e}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(te) - f(0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2} f(e)}{t} = f(e) = e_1^3$

c) $\operatorname{grad} f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0), \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0)\right)^T$

$\overset{b)}{=} (f(1,0), f(0,1))^T = (1,0)^T$; Für $e = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$:

$e \cdot \operatorname{grad} f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = f(e) \overset{b)}{=} \frac{\partial f}{\partial e}(0,0)$

$\Rightarrow f$ nicht diff.bar in $(0,0)$.

d) $\operatorname{grad} f(0,0) \overset{c)}{=} (1,0)^T$; $(x,y) \neq (0,0)$:

$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$

$= \left(\frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x^4}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}\right)^T$

$= \left(\frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}\right)^T$

2. T kompakt, f stetig $\Rightarrow$ Min und Max von $f|_T$ ex.

<u>Stationäre Punkte im Innern:</u>

$\operatorname{grad} f(x,y) = (y-4x,\ x-4y)^T \stackrel{!}{=} (0,0)^T$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Rand: Nach Lagrange existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$(f+\lambda g)'(x,y,\lambda) = 0$, wobei $g(x,y) = x^2+y^2-8$

also: $y - 4x + 2\lambda x = 0$ (1);

$x - 4y + 2\lambda y = 0$ (2)

$x^2 + y^2 - 8 = 0$ (3)

(1)+(2): $(x+y) - 4(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0$

$\Rightarrow x+y = 0 \vee \lambda = \frac{3}{2}$

<u>1. Fall: $\lambda = \frac{3}{2}$</u>: (1) $\Rightarrow x = y$; (3) $\Rightarrow x = y = \pm 2$

<u>2. Fall: $x = -y$</u>: (3) $\Rightarrow (x,y) = \pm(2,-2)$

alle in Frage kommenden Punkte:

$f(0,0) = 0$; $f(\pm 2, \pm 2) = -12$; $f(\pm 2, \mp 2) = -20$

$\Rightarrow \operatorname{Min} f|_T = -20$; $\operatorname{Max} f|_T = 0$.

---

3. $(x,y,z) = r(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta)$,

$d(x,y,z) = r^2\cos\theta\, d(r,\varphi,\theta)$

$$\int_{B_\rho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, d(x,y,z) = \int_\rho^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{r}\cos\theta\, d(\theta,\varphi,r)$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_\rho^R r\,dr = \frac{\pi}{4}(R^2-\rho^2) \xrightarrow{\rho\to 0^+} \frac{\pi}{4}R^2$$

---

4. <u>Bernoulli-Dgl.</u> $(-2)y^{-3}$

$\leadsto (y^{-2})' - 4x^3 - 4xy^{-2} = 0$. Subst. $u = y^{-2}$ (gesucht $y > 0$).

$u' = 4xu + 4x^3$. <u>Lineare Dgl.</u>, also:

$u_h = Ce^{\int 4x\,dx} = Ce^{2x^2}$

<u>Ansatz</u>: $u_p(x) := C(x)e^{2x^2}$

$\leadsto u_p'(x) = C'(x)e^{2x^2} + C(x)4xe^{2x^2} \stackrel{!}{=} 4xC(x)e^{2x^2} + 4x^3$

$\leadsto C'(x) = 4x^3e^{-2x^2}$

$\leadsto C(x) = \int 4x^3e^{-2x^2}\,dx = -x^2e^{-2x^2} + \int 2xe^{-2x^2}\,dx$

$= -x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{2}e^{-2x^2}$

allg. Lsg.: $u = -x^2 - \frac{1}{2} + ce^{2x^2}$;

$u(0) = y(0)^{-2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$\stackrel{y>0}{\Rightarrow} y = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2x^2}-1-2x^2}}$

---

5. a) <u>lineare Dgl.</u>: $y_h = Ce^{\int \tan x\,dx} = Ce^{-\ln(\cos x)}$

$= \frac{C}{\cos x}$; Ansatz: $y_p(x) := \frac{C(x)}{\cos(x)}$

$\Rightarrow y_p' = \frac{C'(x)}{\cos(x)} + C(x)\frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2} \stackrel{!}{=} C(x)\frac{\sin x}{(\cos x)^2} - 2\sin x$

$\leadsto C'(x) \stackrel{!}{=} -2\sin x\cos x = -\sin(2x)$.

$\leadsto C(x) = \frac{\cos(2x)}{2} \rightarrow$ allg. Lsg.: $y = \frac{C}{\cos x} + \frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x \sin x}{2}$

$= \frac{C}{\cos x} + \frac{\cos(2x)}{2\cos x}$

b) <u>getrennte Veränderliche</u>: $\int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx = C - \cos x$

$\Rightarrow e^{-y} = \cos x - C \Rightarrow y = -\ln(\cos x - C)$

Lösung auf $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, falls $C \le 0$.

II **6.** $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0$

$\rightsquigarrow u_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t$.

Ansatz: $u_p = a\cos(2t) + b\sin(2t)$

$\rightsquigarrow 16u_p - 8u_p + u_p \stackrel{!}{=} \sin(2t)$

$\rightsquigarrow 9a\cos(2t) + 9b\sin(2t) \stackrel{!}{=} \sin(2t)$

$\rightarrow a = 0,\ b = \frac{1}{9}$

allg. Lsg.: $u = c_1\cos t + c_2 \sin t + c_3 t\cos t + c_4 t \sin t + \frac{1}{9}\sin(2t)$.

$u(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $u'(0) = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 + \frac{2}{9} = 0\ (*)$;

$u''(0) = 0 \Rightarrow 2c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$;

$u'''(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -c_2 - c_3 \cdot 3 - \frac{8}{9} = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} c_3 = -\frac{1}{3}$

$c_2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{9}(\sin t - 3t\cos t + \sin(2t))$

7. a) komplexe Form: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \alpha x e^{-ikx}\,dx + \int_0^{\pi} \beta x e^{-ikx}\,dx\right)$

Fall $k=0$: $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha x^2}{2}\Big|_{x=-\pi}^{0} + \frac{\beta x^2}{2}\Big|_{x=0}^{\pi}\right) = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}$

Fall $k\neq 0$: $\int x e^{-ikx}\,dx = \frac{xe^{-ikx}}{-ik} - \int \frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx$

$= \left(\frac{ix}{k} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-ikx}$ also:

$2\pi\hat{f}(k) = \alpha\left(\frac{ix}{k} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-ikx}\Big|_{x=-\pi}^{0} + \beta\left(\frac{ix}{k} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-ikx}\Big|_{x=0}^{\pi}$

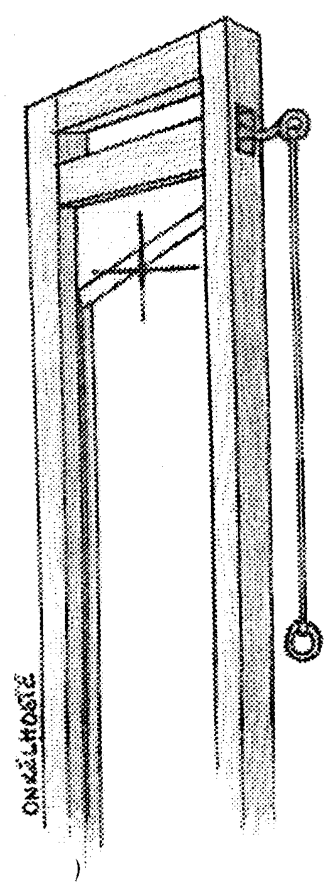
$= \frac{\alpha}{k^2} - \alpha\left(\frac{-i\pi}{k} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-ik\pi} + \beta\left(\frac{i\pi}{k} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-ik\pi} - \frac{\beta}{k^2}$

$e^{ik\pi} = e^{-ik\pi} = (-1)^k$ $\rightsquigarrow$ $\hat{f}(0) = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}$; $a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^k)}{\pi k^2}$;

II (7. a) forts.)

$b_k = -\frac{(-1)^k(\alpha+\beta)}{k} = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))\ (k\neq 0)$

b) f stückweise glatt $\Rightarrow$ f wird durch Fourierreihe in allen Stetigkeitspunkten von f dargestellt. Das sind $x \in \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ falls $\alpha \neq -\beta$ und $x \in \mathbb{R}$ falls $\alpha = -\beta$.



"7 TAGE - 7 KÖPFE"
Ich mochte die Show,
obwohl sie ein vorher-
sehbares Ende hatte...