

## HM II

1. Beschränktheit einer Menge nachweisen:

$\mathbb{R}^n \supset M := \{(x_1, \dots, x_n) : \text{Bedingungen}\} \Rightarrow \|(x_1, \dots, x_n)\|$  aufstellen und aus den Bedingungen der Menge eine Abschätzung treffen.

2. Offenheit einer Menge nachweisen:

Sei  $B$  abgeschlossen und  $B \neq \emptyset$  sowie  $B \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow$  nicht offen

nicht offen  $\Leftrightarrow$  finde einen Punkt in der Menge für den gilt:  $(x_1, \dots, x_n) \in B$  aber

$(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \cdot e_i \notin B \forall \varepsilon > 0$  und  $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$  „der Rand gehört zur Menge“

„offen wenn  $<$  oder  $>$  in der Mengendefinition auftritt“

3. Abgeschlossenheit einer Menge nachweisen:

Sei  $C$  offen und  $C \neq \emptyset$  sowie  $C \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow$  nicht abgeschlossen

nicht abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  „finde eine Folge in der Menge die gegen einen Punkt außerhalb konvergiert“

abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  für jede Folge in der Menge gilt: die Folge konvergiert gegen einen Punkt in der Menge

4. Kompaktheit einer Menge nachweisen:

kompakt  $\Leftrightarrow$  abgeschlossen und beschränkt

5. Konvergenz und Grenzwerte im  $\mathbb{R}^n$ :

- keine Konvergenz  $\Leftrightarrow$  es gibt zwei Folgen, welche gegen denselben Punkt streben, für die die Funktion jedoch unterschiedliche Grenzwerte besitzt
- Konvergenz  $\Leftrightarrow$  die Funktion kann so umgeformt werden, dass der Punkt für den die Funktion untersucht werden soll direkt eingesetzt werden kann
- „Maximum-Methode“, „Majorantenkriterium“, „Polarkoordinaten“, „Grenzwerte aus  $\mathbb{R}^1$ “

6. Stetigkeit im  $\mathbb{R}^n$ :

$f$  stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$  für jede Folge  $(x^{(k)})$  in  $D$  gilt:

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$$

$f$  nicht stetig  $\Leftrightarrow$  zwei Folgen streben gegen denselben Wert, die Funktion jedoch strebt für diese Folgen gegen unterschiedliche Werte („Maximum-Methode“ bei Stetigkeit in  $(0, 0)$  bspw. anwendbar)

7. Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  nach  $x_i$ :

$$f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_i) - f(x_0)}{h} \quad \text{falls GW existiert}$$

$$(\text{grad } f)(x_1, \dots, x_n) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$$

8. Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

9. Mittelwertsatz:  $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$  für ein  $\xi \in [a, b]$

10. Richtungsableitungen:  $a = (a_1, \dots, a_n)$  heißt Richtung  $\Leftrightarrow a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \quad \text{existiert}$$

11. Extrema finden und identifizieren:

Gradient berechnen,  $(\text{grad } f) = 0$  setzen und verdächtige Stellen ausrechnen („Boolesche Umformungen“), Hesse-Matrix aufstellen und Punkte einsetzen: positiv definit  $\Rightarrow$  Minimum; negativ definit  $\Rightarrow$  Maximum; indefinit  $\Rightarrow$  kein Extremum

12. implizit definierte Funktionen:

Punkt in die Funktion einsetzen und prüfen, ob Ergebnis 0 ist, Funktion nach der/den gewünschten Variablen ableiten und sicherstellen, dass mit eingesetztem Punkt  $\neq 0$  ist, Ableitung der gesuchten Funktion berechnen durch:

$$g'(x_0) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

13. Extrema unter Nebenbedingungen:

Funktion  $h$  aufstellen und ableiten, verdächtige Stellen sind diejenigen für welche  $h'$  nicht maximalen Rang hat, ansonsten

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 h_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m h_m(x_1, \dots, x_n)$$

aufstellen und (grad  $H$ ) = 0 lösen

14. Integration im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\int_{A \times B \times C} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A \int_B \int_C f(x, y, z) dz dy dx$$

wenn  $f$  stetig (= Fubini); Integralreihenfolge beliebig!

15. Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \quad d(x, y) = r \cdot d(r, \varphi)$$

16. Zylinderkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad z = z \Rightarrow d(x, y, z) = r \cdot d(r, \varphi, z)$$

17. Kugelkoordinaten:

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta \quad z = r \sin \vartheta$$

mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow d(x, y, z) = r^2 \cos \vartheta d(r, \varphi, \vartheta)$

18. Exakte Differentialgleichungen:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Prüfen, ob  $P_y = Q_x$ ; ja  $\rightarrow F_x \stackrel{!}{=} P \Rightarrow F$  bestimmen (+ $c(y)$  nicht vergessen)

$F_y$  bilden und  $\stackrel{!}{=} Q$  setzen  $\Rightarrow c'(y)$  bestimmen  $\Rightarrow c(y) \Rightarrow F(x, y) = c$  ist implizite allgemeine Lösung (evtl. nach  $y$  auflösen); AWP  $\Rightarrow c$  bestimmen durch einsetzen

19. Integrierende Faktoren: Dgl. wie oben, aber  $P_y \neq Q_x$

$f := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$  hängt nur von  $x$  ab  $\Rightarrow \mu = e^{\int f(x)dx}$  oder

$g := \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$  hängt nur von  $y$  ab  $\Rightarrow \mu = e^{-\int g(y)dy}$

$\Rightarrow \mu$  ist integrierender Faktor  $\Rightarrow$  Dgl.  $\cdot \mu$  ist exakt  $\Rightarrow$  wie bekannt lösen

20. Getrennte Veränderliche:  $y' = f(x) \cdot g(y)$  mit  $y' = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c$  ausrechnen und nach  $y$  auflösen

AWP  $\Rightarrow c$  bestimmen (Lösung der Dgl. nur für spezielle  $x$ !)

21. Lineare Differentialgleichungen:  $y' = \alpha(x)y + s(x)$

homogene Dgl.  $y' = \alpha(x)y$  betrachten  $\Rightarrow$  allgemeine Lsg.:  $y(x) = ce^{\int \alpha(x)dx}$

Variation der Konstanten:  $y_p(x) = c(x) \cdot e^{\int \alpha(x)dx} \Rightarrow y'_p(x) \stackrel{!}{=} \alpha(x)y_p(x) + s(x) \Rightarrow c(x)$  bestimmen

$\Rightarrow y_p(x)$  bestimmen = spezielle Lsg. der inhom. Gl.

$\Rightarrow$  allg. Lsg. der inhom. Gl. =  $y_p +$  allg. Lsg. der hom. Gl.