Zusammengestellt von:
Christian Koch
Christian Hennings

HM-Formelsammlung

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Binomialformel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,,\ |q|<1$

Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \forall n \in N$

Grenzwerte einiger Reihen:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (nach Euler)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$$

Konvergenzradien von Potenzreihen:

Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe.

Die Menge $M = \left\{ x \in R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \right\}$ ist die zugehörige Menge aller x, für die die Potenzreihe konvergiert. Diese Menge hat die Form [-r,r], (-r,r), (-r,r] oder [-r,r). Dabei ist r der Konvergenzradius und es gilt:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ mit } r = 0 \text{ für } r = \frac{1}{\infty} \text{ und } r = \infty \text{ für } r = \frac{1}{0}.$$

Um die Form von M zu bestimmen, muss nach der Berechnung von r nur noch die Konvergenz der Reihe für die Randpunkte $x = -r$ und $x = r$ geprüft werden.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Sätze über trigonometrische Funktionen:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

Ableitungen:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(a^x)' = \ln(a)a^x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Integrale:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)$ (beim Ableiten von f zu f‘ dürfen keine Konstanten wegfallen)

$$\int \ln x dx = x\ln x - x$$

$$\int \arctan ax\,dx = x \arctan ax - \frac{1}{2a}\ln(x^2 a^2 + 1)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2}$$

$$\int \tan cx\,dx = -\frac{1}{c}\ln|\cos x| \qquad \int \cot cx\,dx = \frac{1}{c}\ln|\sin x|$$

Weitere Integrale siehe Ableitungen „rückwärts“

Taylorsche Reihe am Entwicklungspunkt x=a:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorsche Formel:

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) + \underbrace{\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt}_{\text{Taylorsches Restglied}}$$

Lagrangesche Form des Restglieds: $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \exists \xi \in [a,x]$

Gradient:

$$\nabla f(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Jacobi-Matrix (Ableitung einer Funktion $f: R^n \to R^m$):

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{x_n} \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix (2. Ableitung einer Funktion $f:(x_1,\dots,x_n)\to R$):

$$H_f(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{x_1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_1}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{x_1}(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{x_2}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_2}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{x_2}(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{x_n}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_n}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{x_n}(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Kettenregel:

$$D(f\circ g\circ h)(x)=D(f(g(h(x))))=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)=Df(g\circ h)(x)\cdot D(g\circ h)(x)$$

Definitheit von Matrizen:

Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv** definit, wenn gilt:

- alle Eigenwerte von A sind **positiv**
- oder für alle Unterdeterminanten von A gilt: $\Delta_{ii}>0$

Eine symmetrische Matrix A heißt **negativ** definit, wenn gilt:

- alle Eigenwerte von A sind **negativ**
- oder für alle Unterdeterminanten von A gilt: $\Delta_{11}<0,\ \Delta_{22}>0,\ \Delta_{33}<0,\ \Delta_{44}>0,\ \dots$

Integralrechnung im R^n:

$$B=\{(x,y,z)\in R^3 : a\le x\le b, c\le z\le d, 0\le y\le f(x,z)\}$$

$B(z_0)$ sei der Schnitt von B mit der Hyperebene $z=z_0$.

Also: $B(z)=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, 0\le y\le f(x,z)\}$

$$\overset{\text{Cavalieri}}{\Rightarrow}\ \mu(B)=\int_c^d \mu(B(z))dz$$

$$B=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$$

$$\Rightarrow \mu(B)=\int_a^b f(x)dx$$

Für höhere Dimensionen führt man analog weitere Schnitte an Hyperebenen durch.

Koordinatentransformationen:

$$\int_B f(x)dx = \int_H f[\Psi(y)]\left|\det\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|dy$$

Polarkoordinaten:

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow \int_B f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\right)d\varphi$$

Kugelkoordinaten:

$x = r\cos\varphi\cos\vartheta \qquad y = r\sin\varphi\cos\vartheta \qquad z = r\sin\vartheta$

$$\Rightarrow \int_B f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left(f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)r^2\cos\vartheta\right)dr\right)d\varphi\right)d\vartheta$$

Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$

$$\Rightarrow \int_B f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{z_1}^{z_2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdr\right)d\varphi\right)dz$$

Differentialgleichungen:

<u>1. inhomogene DGLs:</u>

$y' + \varphi(x)y = \psi(x)$

Lösung durch Substitution: $\frac{u'}{u} = \varphi(x) \Rightarrow u = e^{\int\varphi(x)dx}$

$\Rightarrow y'u + u'y = \psi(x)u$

oder alternativ durch Variation der Konstanten:

Lösung der homogenen DGL $y_h'+\varphi(x)y_h = 0$

ergibt: $y_h = \omega(x)C$

Variation der Konstanten: $y = \omega(x)C(x)$, y‘ bilden, in die Ausgangsgleichung einsetzen und nach C‘(x) auflösen. C‘(x) nach x integrieren und schließlich in $y = \omega(x)C(x)$ einsetzen.

2. Bernoullische DGL:

$y'+\varphi(x)y = \psi(x)y^n$, $n \neq 1$

Lösung durch Substitution:

$$y = t^{\frac{1}{1-n}}$$

$$y' = \frac{1}{1-n} t^{\frac{n}{1-n}} \cdot t'$$

$$\Rightarrow t'+(1-n)\varphi(x)t = (1-n)\psi(x)$$

3. Riccatische DGL:

$y' = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \omega(x)$

Lösung durch Substitution:

$$y - y_1 = \frac{1}{t}$$

y_1 ist eine partikuläre Lösung, die erraten werden muß. Häufig paßt: $y = \frac{A}{x}$ $y' = -\frac{A}{x^2}$

4. Integrierender Faktor:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

ist exakt, falls gilt: $\frac{d(P(x,y))}{dy} = \frac{d(Q(x,y))}{dx}$

Falls nicht exakt: Lösung durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor, so dass gilt: $\frac{d(\mu P)}{dy} = \frac{d(\mu Q)}{dx}$.

Es ist keine generelle Methode zum Auffinden eines integrierenden Faktors bekannt!

Häufig gilt einer der folgenden Spezialfälle:

1) $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ hängt nicht von y ab

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx$$

2) $\frac{P_y - Q_x}{P}$ hängt nicht von x ab

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{P_y - Q_x}{P} dy$$

Lösung der exakten DGL:

Aus $F_x = \mu P$ F berechnen, so dass F $\phi(y)$ als Konstante erhält. Dann daraus F_y bilden. Es muss gelten: $F_y \equiv \mu Q$. Durch einen Koeffizientenvergleich lässt sich $\phi'(y)$ bestimmen und daraus $\phi(y)$.

5. Laplace-Transformation:

f sei beschränkt. Dann gilt: $LT\big(f(x)\big)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$

$$LT\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)(s) = \lambda LT\big(f(x)\big)(s) + \mu LT\big(g(x)\big)(s)$$

$f(x)$	$LT\big(f(x)\big)(s)$	Bedingungen
x^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	a>-1, s>0
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	s>a
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	s>0
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	s>0
$\sin ax - ax \cos ax$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	s>0

6. Lösung mittels Potenzreihen:

Ansatz:
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$
$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$
$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$
$$\vdots$$

Diese Formen müssen nun in die DGL eingesetzt werden. Dann werden die Reihen so umgeformt, dass x überall den gleichen Exponenten hat. Nun wird ein Koeffizientenvergleich hinsichtlich x^k durchgeführt und eine allgemeine Form für c_n gefunden.

7. DGL's vom Typ: $\vec{y}'(x)=A(x)\cdot\vec{y}(x)+\vec{b}(x)$:

(1) Lösung des homogenen Systems $(\vec{y}_h)'(x)=A(x)\cdot\vec{y}_h(x)$ mittels vorgegebenem Ansatz berechnen.

(2) Bestimmung der allgemeinen homogenen Lösung nach d'Alembert: Ansatz: $\vec{y}_{al,h}(x)=\varphi(x)\cdot\vec{y}_h(x)+\vec{z}(x)$ ($\vec{z}$ hat in einer Zeile den Eintrag 0). Dann $\vec{y}_{al,h}(x)$ in das homogene Ausgangssystem einsetzen, so dass gilt: $(\vec{y}_{al,h})'(x)\overset{!}{=}A(x)\cdot\vec{y}_{al,h}(x)$

(3) Aufstellen des Fundamentalsystems: $F(x)=\left(\vec{y}_h(x)\quad \vec{y}_{al.h}(x)\right)$

(4) Variation der Konstanten: $\vec{y}_{al}(x)=F(x)C(x)$

$$(\vec{y}_{al})'(x)=F'(x)C(x)+F(x)C'(x)$$
$$\overset{!}{=}A(x)\vec{y}_{al}(x)+b(x)=A(x)F(x)C(x)+b(x)$$
$$\Rightarrow F(x)C'(x)=b(x)$$
$$\Leftrightarrow C'(x)=F^{-1}(x)b(x)$$

C'(x) zeilenweise integrieren und C(x) einsetzen.

Bemerkung 1: Inverse einer 2X2-Matrix: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Bemerkung 2: Ist b(x)=0, so entfällt Teil 4 und das Fundamentalsystem ist die Lösung

8. DGL's vom Typ: $\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b}(x)$:

(1) Berechnung der Eigenwerte λ_i von A über das Charakteristische Polynom: $\det(A - \lambda I) = 0$

(2) Aufstellen des Fundamentalsystems:

(a) Berechnung der Eigenvektoren $\vec{v}_i$: Kern$(A - \lambda I)$
Tritt der Eigenwert nur einmal auf, lautet der zugehörige Eintrag in das Fundamentalsystem: $\vec{y}_i = e^{\lambda_i x}\vec{v}_i$.

(b) Falls einige Eigenwerte zweifache Nullstellen des Charakteristischen Polynoms sind, wird der erste Eintrag wie oben berechnet. Für den zweiten gilt: $\vec{y}_2 = (a + bx)e^{\lambda x}$

$$(\vec{y}_2)' = (\lambda a + \lambda bx + b)e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} A\vec{y}_2 = (Aa + Abx)e^{\lambda x}$$
$$\Leftrightarrow (Ab = \lambda b) \wedge ((A - \lambda)a = b)$$
$\Leftrightarrow ((A - \lambda)a = b) \wedge (b = \vec{v})$, da $\vec{v}$ Eigenvektor zu A

Das a wird nun in einem LGS bestimmt.

(3) Für inhomogene DGLs ($b(x) \neq 0$) siehe 7.4.

Fourierreihen:

Sei f eine 2π-periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

mit:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx) f(x)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx) f(x)dx$$

Für gerade (achsensymmetrische) Funktionen gilt: $b_n = 0$

Für ungerade (punktsymmetrische) Funktionen gilt: $a_n = 0$
$a_0 = 0$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \cos(\pi n) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$$